Annexe 2

1) *Montrons que quel que soit n un entier impair différent de 1, la suite de Syracuse issue de cet entier ne peut ni diverger vers l'infini ni définir un cycle.*

   Pour cela, on va procéder en plusieurs étapes :

   a) *Nous allons voir les différentes configurations des nombres impairs selon s'il appartient à* $8\mathbb{N}+1, 8\mathbb{N}+3, 8\mathbb{N}+5$ *ou* $8\mathbb{N}+7$.
   b) *A partir des conclusions déduites de cette étude, un schéma récapitulatif montrera le comportement global de tous les nombres impairs.*
   c) *A partir du schéma précédent, on étudiera les différents chemins (même s'il y en a une infinité) et on vérifiera que quel que soit l'entier de départ, il y a un nombre fini de boucles ou d'itérations dans les différents ensembles d'impairs* $(8\mathbb{N}+1, 8\mathbb{N}+3, 8\mathbb{N}+5$ *ou* $8\mathbb{N}+7)$ *et donc cela converge vers 1.*

a) *Tout d'abord, nous allons étudier les différentes configurations (du plus simple au plus compliqué) qu'on peut rencontrer pour chaque cas impair.*

$Soit\ n \ \in 2\mathbb{N}+1:$

Cas $8\mathbb{N}+3$ *:*

$*\ n \ \in 8\mathbb{N}+3\ donc\ n\ peut\ s'écrire\ sous\ la\ forme\ n=8k+3\ avec\ k\ \in \mathbb{N}$
$3n+1=24k+10\ qu'on\ peut\ diviser\ par\ 2\ quel\ que\ soit\ k\ soit\ 12k+5$
Si k est pair donc $\exists\ p \in \mathbb{N}\ tq\ k=2p\ et\ 12k+5=24p+5\ \in 8\mathbb{N}+5.$
Si k est impair donc $\exists\ p \in \mathbb{N}\ tq\ k=2p+1\ et\ 12k+5=24p+17\ \in 8\mathbb{N}+1.$

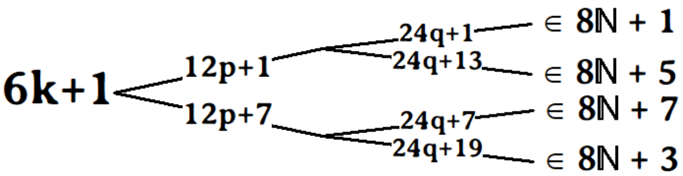
Cas $8\mathbb{N}+7$ *:*

$*\ n \ \in 8\mathbb{N}+7\ donc\ n\ peut\ s'écrire\ sous\ la\ forme\ n=8k+7\ avec\ k\ \in \mathbb{N}$
$3n+1=24k+22\ qu'on\ peut\ diviser\ par\ 2\ quel\ que\ soit\ k\ soit\ 12k+11$
Si k est pair donc $\exists\ p \in \mathbb{N}\ tq\ k=2p\ et\ 12k+11=24p+11\ \in 8\mathbb{N}+3.$
Si k est impair donc $\exists\ p \in \mathbb{N}\ tq\ k=2p+1\ et\ 12k+11=24p+23\ \in 8\mathbb{N}+7.$

Cas $8\mathbb{N}+1$ *:*

$*\ n \ \in 8\mathbb{N}+1\ donc\ n\ peut\ s'écrire\ sous\ la\ forme\ n=8k+1\ avec\ k\ \in \mathbb{N}$
$3n+1=24k+4\ qu'on\ peut\ diviser\ par\ 4\ quel\ que\ soit\ k\ soit\ 6k+1$

D'où l'arbre suivant :

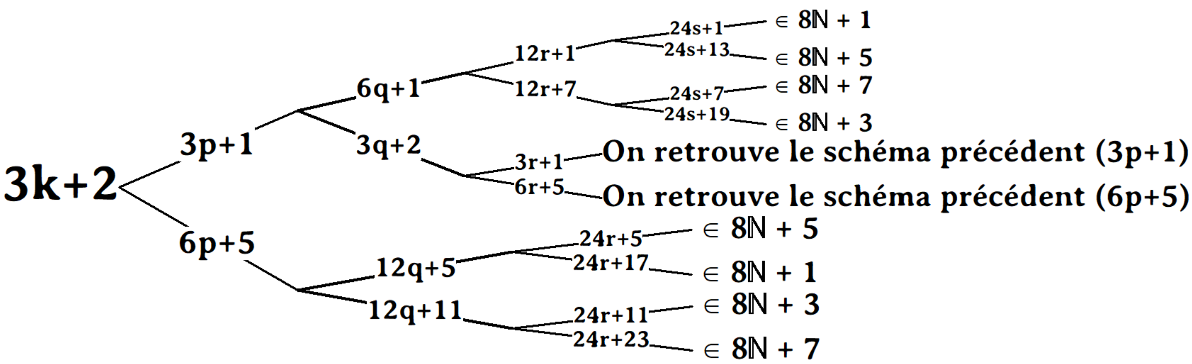


Si $k \in 4\mathbb{N}$ *alors* $6k+1 \in 8\mathbb{N}+1$
Si $k \in 4\mathbb{N}+1$ *alors* $6k+1 \in 8\mathbb{N}+7$
Si $k \in 4\mathbb{N}+2$ *alors* $6k+1 \in 8\mathbb{N}+5$
Si $k \in 4\mathbb{N}+3$ *alors* $6k+1 \in 8\mathbb{N}+3$

Cas $8\mathbb{N}+5$ *:*

$* \ n \in 8\mathbb{N}+5$ *donc n peut s'écrire sous la forme* $n = 8k+5$ *avec* $k \in \mathbb{N}$
$3n+1 = 24k+16$ *qu'on peut diviser par 8 quel que soit k soit* $3k+2$
Si k est impair donc $\exists\, p \in \mathbb{N}$ *tq* $k = 2p+1$ *et* $3k+2 = 6p+5$
Si k est pair donc $\exists\, p \in \mathbb{N}$ *tq* $k = 2p$ *et* $3k+2 = 6p+2$ *qu'on peut diviser par 2*
et on obtient $3p+1$
Si p est pair donc $\exists\, q \in \mathbb{N}$ *tq* $p = 2q$ *et* $3p+1 = 6q+1$
Si p est impair donc $\exists\, q \in \mathbb{N}$ *tq* $p = 2q+1$
et $3p+1 = 6q+4$ *qu'on peut diviser par 2 et on obtient* $3q+2$

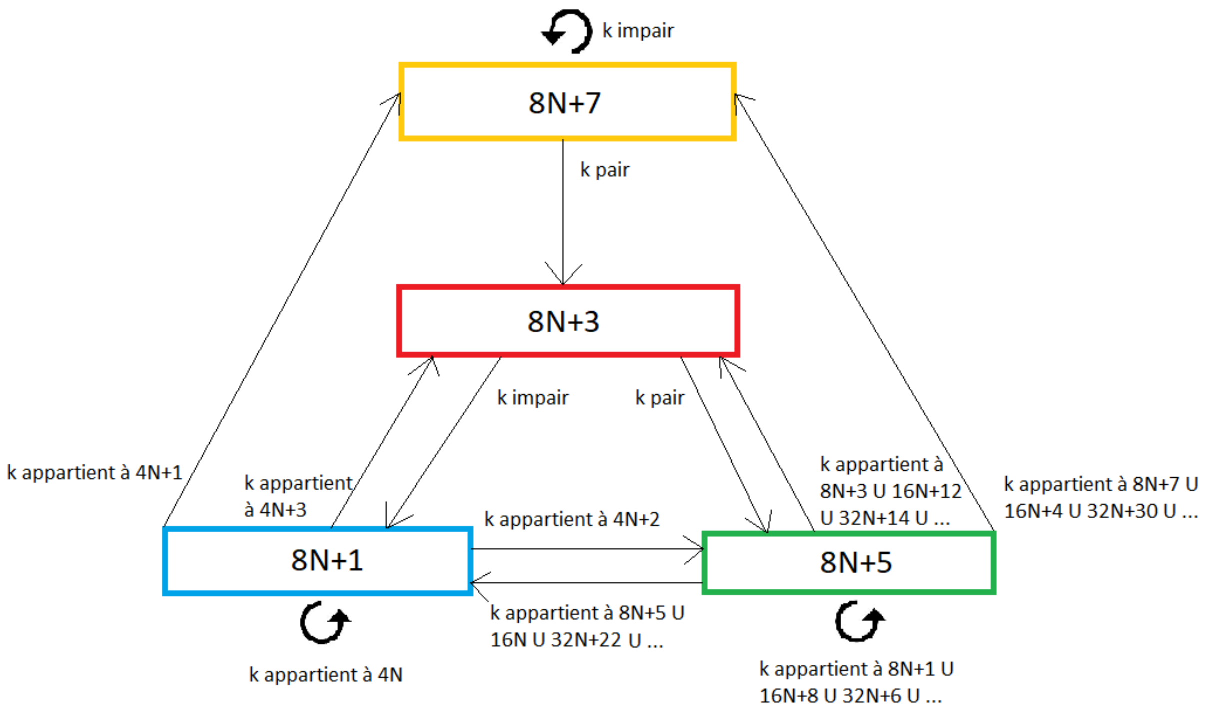
D'où l'arbre suivant :



Si $k \in 8\mathbb{N}+1 \cup 16\mathbb{N}+8 \ \cup 32\mathbb{N}+6 \cup \ldots$ *alors* $3k+2 \in 8\mathbb{N}+5$
Si $k \in 8\mathbb{N}+3 \cup 16\mathbb{N}+12 \ \cup 32\mathbb{N}+14 \cup \ldots$ *alors* $3k+2 \in 8\mathbb{N}+3$
Si $k \in 8\mathbb{N}+5 \cup 16\mathbb{N} \ \cup 32\mathbb{N}+22 \cup \ldots$ *alors* $3k+2 \in 8\mathbb{N}+1$
Si $k \in 8\mathbb{N}+7 \cup 16\mathbb{N}+4 \ \cup 32\mathbb{N}+30 \cup \ldots$ *alors* $3k+2 \in 8\mathbb{N}+7$

b) *Présentation du schéma récapitulatif*

<u>On en déduit le schéma suivant</u> :



On peut constater pour les cas $8\mathbb{N}+7, 8\mathbb{N}+3$ *et* $8\mathbb{N}+1$ *que lorsque k est pair (*$8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3,\ 8\mathbb{N}+3 \Rightarrow 8\mathbb{N}+5$ *et* $8\mathbb{N}+1 \Rightarrow 8\mathbb{N}+1$ *ou* $8\mathbb{N}+5$ *), la suite de Syracuse a une tendance à décroitre et inversement lorsque k est impair (*$8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+7,\ 8\mathbb{N}+3 \Rightarrow 8\mathbb{N}+1$ *et* $8\mathbb{N}+1 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3$ *ou* $8\mathbb{N}+7$ *), la suite de Syracuse a une tendance à croître.*

c) *Etudions maintenant les opérations sur les k lors d'un passage 3n+1 pour mettre en évidence le fait qu'il n'existe pas de boucle infinie (infinité de boucles mais aucune est infinie) :*

Pour chaque ensemble impair $(8\mathbb{N}+1, 8\mathbb{N}+3, 8\mathbb{N}+5$ *ou* $8\mathbb{N}+7)$*, nous allons étudier pour chaque cas l'opération effectuée sur k.*
La notation suivante $E1 \Rightarrow E2$ *signifie dans la suite du document qu'un élément appartenant à E1 se transforme en un élément appartenant à E2 après l'opération « 3x+1 ».*

<u>Cas</u> $\underline{8\mathbb{N}+7}$ *:*

- k *impair* : $8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+7 \cap 12\mathbb{N}+11 = 24\mathbb{N}+23$ *:*
  Soit $n \in 8\mathbb{N}+7$ *avec* $n = 8k+7$ *où* $k \in 2\mathbb{N}+1$ *donc* $k = 2p+1$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 12k+11 = 12(2p+1) + 11 = 8(3p+2) + 7 = $\mathbf{8\left(\frac{3(k-1)}{2}+2\right)+7}$
- k *pair* : $8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3 \cap 12\mathbb{N}+11 = 24\mathbb{N}+11$ *:*
  Soit $n \in 8\mathbb{N}+7$ *avec* $n = 8k+7$ *où* $k \in 2\mathbb{N}$ *donc* $k = 2p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 12k+11 = 12(2p) + 11 = 8(3p+1) +3 = $\mathbf{8\left(\frac{3k}{2}+1\right)+3}$

Cas $8\mathbb{N}+3$ *:*

- k *impair* : $8\mathbb{N}+3 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+1\ \cap 12\mathbb{N}+5 = 24\mathbb{N}+17$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+3$ *avec* $n = 8k+3$ *où* $k \in 2\mathbb{N}+1$ *donc* $k = 2p+1$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 12k+5 = 12(2p+1) + 5 = 8(3p+2) + 1 = $8\left(\frac{3(k-1)}{2}+2\right)+1$
- k *pair* : $8\mathbb{N}+3 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+5\ \cap 12\mathbb{N}+5 = 24\mathbb{N}+5$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+3$ *avec* $n = 8k+3$ *où* $k \in 2\mathbb{N}$ *donc* $k = 2p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 12k+5 = 12(2p) + 5 = 8(3p) +5 = $8\left(\frac{3k}{2}\right)+5$

Cas $8\mathbb{N}+1$ *:*

- $k\ \in 4\mathbb{N}$: $8\mathbb{N}+1 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+1\ \cap 6\mathbb{N}+1 = 24\mathbb{N}+1$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+1$ *avec* $n = 8k+1$ *où* $k \in 4\mathbb{N}$ *donc* $k = 4p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 6k+1 = 6(4p) + 1 = 8(3p) +1 = $8\left(\frac{3k}{4}\right)+1$
- $k\ \in 4\mathbb{N}\ +3$: $8\mathbb{N}+1 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+3\ \cap 6\mathbb{N}+1 = 24\mathbb{N}+19$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+1$ *avec* $n = 8k+1$ *où* $k \in 4\mathbb{N}+3$ *donc* $k = 4p+3$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 6k+1 = 6(4p+3) + 1 = 8(3p+2) +3 = $8\left(\frac{3(k-3)}{4}+2\right)+3$
- $k\ \in 4\mathbb{N}\ +2$: $8\mathbb{N}+1 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+5\ \cap 6\mathbb{N}+1 = 24\mathbb{N}+13$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+1$ *avec* $n = 8k+1$ *où* $k \in 4\mathbb{N}+2$ *donc* $k = 4p+2$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 6k+1 = 6(4p+2) + 1 = 8(3p+1) +5 = $8\left(\frac{3(k-2)}{4}+1\right)+5$
- $k\ \in 4\mathbb{N}+1$: $8\mathbb{N}+1 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+7\ \cap 6\mathbb{N}+1 = 24\mathbb{N}+7$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+1$ *avec* $n = 8k+1$ *où* $k \in 4\mathbb{N}+1$ *donc* $k = 4p+1$*avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 6k+1 = 6(4p+1) + 1 = 8(3p) +7 = $8\left(\frac{3(k-1)}{4}\right)+7$

Cas $8\mathbb{N}+5$ *: Il y a une infinité de configurations dont voici un extrait*

- $8\mathbb{N}+5 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+1\ \cap 3\mathbb{N}+2 = 24\mathbb{N}+1\ \cup 24\mathbb{N}+17$*:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+5$ *avec* $n = 8k+5$ *où* $k \in 8\mathbb{N}+5$ *donc* $k = 8p+5$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(8p+5) +2 = 8(3p+2) +1 = $8\left(\frac{3(k-5)}{8}+2\right)+1$
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+5$ *avec* $n = 8k+5$ *où* $k \in 16\mathbb{N}$ *donc* $k = 16p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(16p) +2 on peut diviser par 2 donc cela revient à étudier 8(3p) +1 = $8\left(\frac{3k}{16}\right)+1$
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+5$ *avec* $n = 8k+5$ *où* $k \in 32\mathbb{N}+22$ *donc* $k = 32p+22$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 3k+2 =3(32p+22) +2 = 96p +68 on peut diviser par 4 donc cela revient à étudier 24p+17 = 8(3p+2) + 1= $8\left(\frac{3(k-22)}{32}+2\right)+1$
  …
- $8\mathbb{N}+5 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+3\ \cap 3\mathbb{N}+2 = 24\mathbb{N}+11 \cup 24\mathbb{N}+19$ *:*
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+5$ *avec* $n = 8k+5$ *où* $k \in 8\mathbb{N}+3$ *donc* $k = 8p+3$ *avec* $p \in \mathbb{N}$
  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(8p+3) +2 = 8(3p+1) +3 = $8\left(\frac{3(k-3)}{8}+1\right)+3$
  Soit $n\ \in 8\mathbb{N}+5$ *avec* $n = 8k+5$ *où* $k \in 16\mathbb{N}+12$ *donc* $k = 16p+12$ *avec* $p \in \mathbb{N}$

3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(16p+12) + 2 = 48p+38 on peut diviser par 2 donc cela revient à étudier 24p+19 = 8(3p+2) +3 = $8\left(\frac{3(k-12)}{16}+2\right)+3$

$Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 32\mathbb{N}+14\ donc\ k = 32p+14\ avec\ p \in \mathbb{N}$

3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(32p+14) + 2 = 96p+44 on peut diviser par 4 donc cela revient à étudier 24p+11 = 8(3p+1) +3 = $8\left(\frac{3(k-14)}{32}+1\right)+3$

...

- $8\mathbb{N}+5 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+5 \cap 3\mathbb{N}+2 = 24\mathbb{N}+5\ \cup\ 24\mathbb{N}+13$*:*

  $Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 8\mathbb{N}+1\ donc\ k = 8p+1\ avec\ p \in \mathbb{N}$

  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(8p+1) + 2 = 8(3p) + 5 = $8\left(\frac{3(k-1)}{8}\right)+5$

  $Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 16\mathbb{N}+8\ donc\ k = 16p+8\ avec\ p \in \mathbb{N}$

  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(16p+8) + 2 = 48p+26 on peut diviser par 2 donc cela revient à étudier 24p+13 = 8(3p+1) +5 = $8\left(\frac{3(k-8)}{16}+1\right)+5$

  $Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 32\mathbb{N}+6\ donc\ k = 32p+6\ avec\ p \in \mathbb{N}$

  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(32p+6) + 2 = 96p+20 on peut diviser par 4 donc cela revient à étudier 24p+5 = 8(3p) +5 = $8\left(\frac{3(k-6)}{32}\right)+5$

  ...

- $8\mathbb{N}+5 \Rightarrow\ 8\mathbb{N}+7 \cap 3\mathbb{N}+2 = 24\mathbb{N}+7\ \cup\ 24\mathbb{N}+23$ *:*

  $Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 8\mathbb{N}+7\ donc\ k = 8p+7\ avec\ p \in \mathbb{N}$

  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(8p+7) + 2 = 8(3p+2) +7 = $8\left(\frac{3(k-7)}{8}+2\right)+7$

  $Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 16\mathbb{N}+4\ donc\ k = 16p+4\ avec\ p \in \mathbb{N}$

  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(16p+4) + 2 =48p+14 on peut diviser par 2 donc cela revient à étudier 24p+7 = 8(3p) +7 = $8\left(\frac{3(k-4)}{16}\right)+7$

  $Soit\ n\ \in 8\mathbb{N}+5\ avec\ n = 8k+5\ où\ k \in 32\mathbb{N}+30\ donc\ k = 32p+30\ avec\ p \in \mathbb{N}$

  3n+1 revient à étudier 3k+2 = 3(32p+30) + 2 = 96p + 92 on peut diviser par 4 donc cela revient à étudier 24p+23 = 8(3p+2) +7 = $8\left(\frac{3(k-30)}{32}+2\right)+7$

  ...

<u>Etude de quelques boucles</u> : (Illustrations en annexe)

Définition :

Un cycle peut se redéfinir comme une boucle infinie. Nous allons regarder si une boucle infinie est possible.

- $8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+7\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+7$ *... est-ce possible vers l'infini ? :*

  Pour boucler 2 fois, il faut que $k \in 2\mathbb{N}+1$ *et que* $\frac{3(k-1)}{2}+2 \in 2\mathbb{N}+1$

  $$\Leftrightarrow \frac{3(k-1)}{2} \in 2\mathbb{N}+1$$

  $$\Leftrightarrow \frac{k-1}{2} \in 2\mathbb{N}+1$$

  $$\Leftrightarrow\ k \in 4\mathbb{N}+3$$

  Pour boucler 3 fois, il faut que $k \in 4\mathbb{N}+3$ *et que* $\frac{3(k-1)}{2}+2 \in 4\mathbb{N}+3$

  $$\Leftrightarrow \frac{3(k-1)}{2} \in 4\mathbb{N}+1$$

$\Leftrightarrow\ 3(k-1) \in 8\mathbb{N}+2 = 24\mathbb{N}+2\ \cup 24\mathbb{N}+10\ \cup 24\mathbb{N}+18$
$\Leftrightarrow\ 3(k-1) \in 24\mathbb{N}+18$
$\Leftrightarrow\ k-1 \in 8\mathbb{N}+6$
$\Leftrightarrow\ k \in 8\mathbb{N}+7$
…
Pour boucler j fois, il faut que $k \in 2^j\mathbb{N} + 2^j - 1$
Conclusion : Le bouclage sur $8\mathbb{N}+7$ *indéfiniment est un cas qui ne peut pas se présenter.*

- $8\mathbb{N}+3\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+1 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+1 \ldots$ *est-ce possible vers l'infini ? :*
  Pour boucler une fois, il faut que $k \in 2\mathbb{N}+1$ *et que* $\frac{3(k-1)}{2}+2\ \in 4\mathbb{N}+3$
  $\Leftrightarrow \dfrac{3(k-1)}{2} \in 4\mathbb{N}+1$
  $\Leftrightarrow \dfrac{3(k-1)}{2} \in 12\mathbb{N}+9$
  $\Leftrightarrow \dfrac{(k-1)}{2} \in 4\mathbb{N}+3$
  $\Leftrightarrow k \in 8\mathbb{N}+7$
  …
  Pour boucler j fois, il faut que $k \in 8^j\mathbb{N} + 7\sum_{l=0}^{j-1} 8^l$
  Conclusion : Le bouclage sur $8\mathbb{N}+3\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+1$ *indéfiniment est un cas qui ne peut pas se présenter.*

- $8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+1 \Rightarrow 8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+1 \ldots$ *est-ce possible vers l'infini ? :*
  Pour boucler une fois, il faut que
  $\dfrac{3\left(\frac{3k}{2}+1-1\right)}{2}+2\ \in 4\mathbb{N}+1$
  $\Leftrightarrow \frac{9k}{4}\ \in 4\mathbb{N}+3$
  $\Leftrightarrow \dfrac{9k}{4}\ \in 36\mathbb{N}+27$
  $\Leftrightarrow \dfrac{k}{4} \in 4\mathbb{N}+3$
  $\Leftrightarrow\ k \in 16\mathbb{N}+12$
  Pour boucler 2 fois, il faut que
  $k \in 256\mathbb{N}+92\ \ (256\mathbb{N}+92 \subset 16\mathbb{N}+12\ )$
  Par construction, l'ensemble des k qui définissent les chemins qui bouclent 3 fois est inclus dans 256N+92 et ainsi de suite….
  …
  Conclusion : Le bouclage sur $8\mathbb{N}+7 \Rightarrow 8\mathbb{N}+3\ \Rightarrow 8\mathbb{N}+1$ *indéfiniment est un cas qui ne peut pas se présenter.*

Conclusion sur les cycles : *Quel que soit le chemin définissant une boucle, l'ensemble des k qui boucle 1 fois contient l'ensemble des k qui boucle 2 fois… On démontre ainsi qu'aucune boucle n'est infinie car si tel était le cas alors le nombre de départ appartiendrait à aucun ensemble.*

Conclusion sur la convergence *: Quel que soit l'entier impair de départ, il ne sera jamais assez grand pour remplir toutes les conditions d'un chemin infini. En effet, plus le vol est grand, plus* *l'ensemble de départ se restreint (aussi bien l'écart e entre solutions potentielles que la 1ère solution s : e*$\mathbb{N}+s$*) donc il n'existe pas d'entier impair avec un vol infini. Par conséquent, toute suite de Syracuse converge vers 1.*

2) *Autre piste de démonstration (à finaliser) :*

Nous allons montrer que quel que soit n un entier impair différent de 1, la suite de Syracuse issue de cet entier contient un entier impair plus petit que n ce qui revient à dire que la suite de Syracuse converge vers 1.

Soit la suite de Syracuse issue de n un entier impair :

- *Si n*$\in 8\mathbb{N}+1$ *alors la suite possède un entier impair plus petit que n dès la 1ère étape*
  $1ère\ étape : \exists\ k\ \in \mathbb{N}\ tq\ n = 8k+1\ donc\ 3n+1 = 24k+4$
  $qu'on\ peut\ diviser\ par\ 4\ quel\ que\ soit\ k\ ce\ qui\ revient\ à\ 6k+1 < 8k+1 = n$
- *Si n*$\in 8\mathbb{N}+5$ *alors la suite possède un entier impair plus petit que n dès la 1ère étape*
  $1ère\ étape : \exists\ k\ \in \mathbb{N}\ tq\ n = 8k+5\ donc\ 3n+1 = 24k+16$
  $qu'on\ peut\ diviser\ par\ 8\ quel\ que\ soit\ k\ ce\ qui\ revient\ à\ 3k+2 < 8k+5 = n$
- *Si n*$\in 8\mathbb{N}+3$ *alors la suite possède un entier impair plus petit que n dès la 2e étape seulement si k est pair (n=8k+3) c'est-à-dire n*$\in 16\mathbb{N}+3$
  $1ère\ étape : \exists\ k\ \in \mathbb{N}\ tq\ n = 16k+3\ donc\ 3n+1 = 48k+10$
  $qu'on\ peut\ diviser\ par\ 2\ quel\ que\ soit\ k\ ce\ qui\ revient\ à\ 24k+5$
  $2ème\ étape : 3(24k+5)+1 = 72k+16\ qu'on\ peut\ diviser\ par\ 8\ quel\ que\ soit\ k$
  ce qui revient à 9k+2 < 16k+3 = n
- *Si n*$\in 16\mathbb{N}+11$ *alors la suite possède un entier impair plus petit que n dès la 3e étape seulement si k* $\in 4\mathbb{N}+1$ *(n=8k+3) c'est-à-dire n*$\in 32\mathbb{N}+11$
  $1ère\ étape : \exists\ k\ \in \mathbb{N}\ tq\ n = 32k+11\ donc\ 3n+1 = 96k+34$
  $qu'on\ peut\ diviser\ par\ 2\ quel\ que\ soit\ k\ ce\ qui\ revient\ à\ 48k+17$
  $2ème\ étape : 3(48k+17)+1 = 144k+52\ qu'on\ peut\ diviser\ par\ 4\ quel\ que\ soit\ k$
  ce qui revient à 36k+13
  3ème étape :*3(36k+13) + 1 = 108k+40 qu'on peut diviser par 4 quel que soit k*
  ce qui revient à 27k+10< 32k+11 = n
- *Si n*$\in 8\mathbb{N}+7$ *alors la suite possède un entier impair plus petit que n dès la 3e étape seulement si k* $\in 4\mathbb{N}+2$ *(n=8k+7) c'est-à-dire n*$\in 32\mathbb{N}+23$
  $1ère\ étape : \exists\ k\ \in \mathbb{N}\ tq\ n = 32k+23\ donc\ 3n+1 = 96k+70$
  $qu'on\ peut\ diviser\ par\ 2\ quel\ que\ soit\ k\ ce\ qui\ revient\ à\ 48k+35$
  $2ème\ étape : 3(48k+35)+1 = 144k+106\ qu'on\ peut\ diviser\ par\ 2\ quel\ que\ soit\ k$
  ce qui revient à 72k+53
  3ème étape :*3(72k+53) + 1 = 216k+160 qu'on peut diviser par 8 quel que soit k*
  ce qui revient à 27k+20< 32k+11 = n

On vient de voir qu'on peut réduire l'étude des n$\in 8\mathbb{N}+3$ *aux n* $\in 16\mathbb{N}+11$ *puis aux* $n \in 32\mathbb{N}+27$ *et de la même façon on peut réduire l'étude des* $n \in 8\mathbb{N}+7$ *aux* $n \in \{n \in 8\mathbb{N}+7\ tq\ n \notin 32\mathbb{N}+23\}$

Etant donné d'une part les relations qui relient les $8\mathbb{N}+1, 8\mathbb{N}+3, 8\mathbb{N}+5$ *et* $8\mathbb{N}+7$ *(voir schéma) et les chemins (création d'un arbre : illustration en annexe) qui permettent d'obtenir un entier impair plus petit que celui de départ, on s'aperçoit que l'ensemble à étudier se réduit indéfiniment au fur et à mesure du nombre d'étapes.*

On écarte la moitié puis un quart en plus puis …. (à finaliser) Soit $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$ *(dénombrement à expliciter plus rigoureusement) c'est-à-dire tout l'ensemble de départ.*

On a montré que quel que soit un entier impair, un entier plus petit se trouve dans la suite de Syracuse issue de l'entier de départ donc on en déduit :

Vol(n) = $\sum Nombre\ d'\text{étapes}\ pour\ arriver\ \text{à}\ un\ nombre\ plus\ petit$

Conclusion : *La suite de Syracuse est décroissante quel que soit l'entier de départ donc elle converge vers 1.*